数理解析研究所講究録
946 巻 1996 年 103-109

被覆面の調和次元

大同工大　瀬川重男　(Shigeo Segawa)
京都産大・理　正岡弘照　(Hiroaki Masaoka)

1. WをHeins[**8**]の意味の**end** (末端) とする: 即ち, Wは零境界の開Riemann面の相対compactでない部分領域で, 相対境界∂W $(\neq \emptyset)$は有限個の互いに素な解析閉曲線からなり, Wの理想境界成分は唯1つである. W上の非負値調和函数で∂Wで境界値0をもつものの族を$\mathcal{P}(W)$とする:

$$\mathcal{P}(W) = \{u \in C(\overline{W}) : \Delta u = 0,\ u \geq 0,\ u|\partial W = 0\}.$$

$h \in \mathcal{P}(W) - \{0\}$が**minimal**であるとは, $0 \leq u \leq h$をみたす任意の$u \in \mathcal{P}(W)$に対して$u = ch$となる定数$c \geq 0$が存在することである. $a \in W$に対して, $\mathcal{Q}(W; a) = \{h \in \mathcal{P}(W) : h$ は minimal, $h(a) = 1\}$ とおく. $\mathcal{Q}(W;a)$の濃度$\#\mathcal{Q}(W;a)$をWの**調和次元**と呼び, $\dim \mathcal{P}(W)$と表すことにする:

$$\dim \mathcal{P}(W) = \#\mathcal{Q}(W; a).$$

明らかに, $\dim \mathcal{P}(W)$はaの取り方に依らない. 最も簡単なendの例は, $W = \{0 < |z| < 1\}$ $(\partial W = \{|z| = 1\})$である. このとき, $\mathcal{P}(W) = \{c \log(1/|z|) : c \geq 0\}$, 即ち$\dim \mathcal{P}(W) = 1$である.

WのMartin境界のうち相対境界∂Wに対応する部分は∂Wと同一視できる. したがって, WのMartin境界のうち理想境界に対応する部分を$\Delta = \Delta^W$とすると, WのMartin compact化W^*は$W^* = W \cup \partial W \cup \Delta$と表される. さらに$\Delta$のminimal点全体を$\Delta_1 = \Delta_1^W$とおくとき, Martin理論に依れば

$$\dim \mathcal{P}(W) = \#\Delta_1 \tag{1}$$

である([**3**, CN-CR]参照). これより, $1 \leq \dim \mathcal{P}(W) \leq \aleph$である. $\dim \mathcal{P}(W) = n$ $(n \in \mathbf{N})$, $\dim \mathcal{P}(W) = \aleph_0$および$\dim \mathcal{P}(W) = \aleph$のそれぞれをみたす$W$の例が存在する ([**8**,HE], [**9**,KR], [**15**,SE], [**14**,NK-SA], [**7**,CN-CR]参照).

2. $D = \{0 < |z| < 1\}$とする. 上で見たように, Dは, $\partial D = \{|z| = 1\}$を相対境界とみなして, 最も単純なendであり, その調和次元は1である. 以下では, D のm葉非有界被覆面であるendの調和次元について調べる. $\{0 < |z| \leq \infty\}$のm葉非有界被覆面$(1 < m < \infty)$で理想境界成分が唯1つであるRiemann面をRとする. このRとRから$\{0 < |z| \leq \infty\}$へ

の射影πに対し, $W=\pi^{-1}(D)$とおくと, Wはendである. このようなend Wの全体を$\mathcal{E}_m$と表す. 任意の$W\in\mathcal{E}_m$に対して

$$1\le \dim \mathcal{P}(W)\le m \tag{2}$$

が成立する ([**8**,HE]).

$0<b_{n+1}<a_n<b_n<1$, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$をみたす数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$に対して

$$G=D-\cup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$$

とおく. Gのcopy $G_1,\cdots,G_m$に対し, G_i上の$\cup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$の上岸と$G_{i+1}$上の$\cup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$の下岸を貼り合わせて(mod. m)得られるDのm葉非有界被覆面をVとすると, $V\in\mathcal{E}_m$である. このVの調和次元は次のように決定される ([**15**,SE], [**12**,M-SE], [**11**,M]).

定理 1. (i) $z=0$がGの非正則境界点のとき, $\dim\mathcal{P}(V)=m$.
(ii) $z=0$がGの正則境界点のとき, $\dim\mathcal{P}(V)=1$.

これの[**15**],[**12**],[**11**]における証明では, Gが実軸に関して対称であることとVの被覆変換群が$\{G_1,\cdots,G_m\}$にtransitiveに作用していることが本質的に使われている. しかしながら, Gのこのような性質が定理1を成立せしめるための本質的条件ではないことは直感的に明らかであろう. 本論の主目的は, この直感が正当であることを示すことである. 実際, $\mathcal{E}_m$に属するendに対して細位相の言葉を使った調和次元の特徴付け(定理2)を与え, さらにそれから定理1を含む形の具体的な結果(定理3,4および5)を導く.

3. 定理2を述べるための準備から入る. 開Riemann面F, F上の正値優調和函数sとFの部分集合Eに対して, balayage ${}^F\hat{R}_s^E$は

$${}^F\hat{R}_s^E(z)=\liminf_{\zeta\to z}\ \inf\{u(\zeta):u\text{は}F\text{で正値優調和かつ}E\text{で}u\ge s\}$$

で定義される (balayageの基本性質については, [**1**,BL-HA], [**2**,BR], [**5**,HL]参照). 被覆面においては, 次の事実は基本的ではあるが有用である ([**12**,M-SE]参照).

補題 1. $\tilde{F}$を開Riemann面Fの非有界被覆面, πを$\tilde{F}$からFへの射影とする. このとき, Fの部分集合EとF上の正値優調和関数sに対して,

$${}^{\tilde{F}}\hat{R}_{s\circ\pi}^{\pi^{-1}(E)}={}^F\hat{R}_s^E\circ\pi. \tag{3}$$

次に, thinness と minimal thinness の定義を述べる ([**2**,BR]参照).

定義 1. $\mathbf{C}$の部分集合Eが$a(\in\mathbf{C})$で**thin**であるとは${}^F\hat{R}_{g_a}^E\neq g_a$が成立することとする, ここで, $F=\{|z-a|<1\}$, $g_a(z)=\log(1/|z-a|)$である. さらに, $N(\subset\mathbf{C})$がaの細近傍であるとは$a\in N$かつ$\mathbf{C}-N$がaでthinであることとする.

Rを正境界のRiemann面とし, RのMartin境界のminimal点全体を$\Delta_1(R)$と表す. Rの

Martin compact化R^*の各点pに対して, pに極をもつR上のMartin核をk_pとする.

定義 2. Rの部分集合Eが$p \in (\Delta_1(R))$で**minimally thin**であるとは${}^R\hat{R}^E_{k_p} \neq k_p$が成立することとする. さらに, Rの部分集合Nに対して, $N \cup \{p\}$がpの**minimal**細近傍であるとは$R - N$がpでminimally thinであることとする.

次の補題はthinnessまたはminimal thinnessについて調べる際に重要な役割を果たす([**6**,NA] 参照).

補題 2. 定義1 (または2)において, 閉集合Eがa (またはp)でthin (またはminimally thin)ならば, $F - E$ (または$R - E$)の唯1つのcomponentにおいて${}^F\hat{R}^E_{g_a} < g_a$ (または${}^R\hat{R}^E_{k_p} < k_p$)が成立する.

各$W(\in \mathcal{E}_m)$に対し, WからDへの射影をπ_Wで表す. $M \cup \{0\}$が$z = 0$の細近傍となるようなDの領域Mの族を$\mathcal{M}$とする. $W(\in \mathcal{E}_m)$と$M(\in \mathcal{M})$に対し, $\pi_W^{-1}(M)$のcomponentの個数を$n_W(M)$で表す. このとき, Wの調和次元$\dim \mathcal{P}(W)$は次のように決定される:

定理 2. 任意の$W \in \mathcal{E}_m$に対して, $\dim \mathcal{P}(W) = \max_{M \in \mathcal{M}} n_W(M)$.

次の系1及び2は, 定理2と(2)から容易に従う.

系 1. $W \in \mathcal{E}_m$とする. $n_W(M) = m$となる$M(\in \mathcal{M})$が存在すれば$\dim \mathcal{P}(W) = m$である.

系 2. $W \in \mathcal{E}_m$とする. すべての$M(\in \mathcal{M})$に対して$n_W(M) = 1$ならば$\dim \mathcal{P}(W) = 1$である.

4. 定理2の証明のために, 次の補題3, 4を用意する. **1**で述べたように$W \in \mathcal{E}_m$のMartin compact化は$W \cup \partial W \cup \Delta_1^W$と表される. 簡単のために, $\pi = \pi_W$, $g(z) = \log \dfrac{1}{|z|}$とおく.

補題 3. p_1をΔ_1^Wの1点, NをWの領域で$N \cup \{p_1\}$がp_1のminimal細近傍となるものとする. このとき, $\pi(N) \in \mathcal{M}$となる.

証明. (1)と(2)より, $\Delta_1^W = \{p_1, \cdots, p_n\} (n \leq m)$とおける. p_iに極をもつW上のMartin核をk_iとおく. 補題2より, Nで

$$ {}^W\hat{R}^{W-N}_{k_1} < k_1 \tag{4} $$

が成立する. 各k_iに対して, $g \circ \pi \geq ck_i$をみたす定数$c > 0$が存在することは容易にわかる. これとMartin積分表現定理から,

$$ g \circ \pi = \sum_{i=1}^{n} c_i k_i. \tag{5} $$

をみたす正数列$c_1, \cdots, c_n$の存在がわかる. これと(3)とbalayageの基本性質から

$$ {}^D\hat{R}^{D-\pi(N)}_g \circ \pi = {}^W\hat{R}^{W-\pi^{-1}(\pi(N))}_{g\circ\pi} \leq {}^W\hat{R}^{W-N}_{g\circ\pi} = \sum_{i=1}^{n} c_i\, {}^W\hat{R}^{W-N}_{k_i} \leq \sum_{i=1}^{n} c_i k_i = g \circ \pi. $$

したがって, (4) より, Nで

$$ {}^{D}\hat{R}_g^{D-\pi(N)} \circ \pi < g \circ \pi, $$

即ち, $\pi(N)$で${}^{D}\hat{R}_g^{D-\pi(N)} < g$となる. D上のbalayageと$\{|z| < 1\}$上のbalayageが等しいことに注意すれば, これは$\pi(N) \cup \{0\}$が$z = 0$の細近傍であること, 即ち$\pi(N) \in \mathcal{M}$を意味する. □

補題 4. $M \in \mathcal{M}$とする. このとき, $\pi^{-1}(M)$の任意の連結成分Nに対して, 点$p(\in \Delta_1^W)$で$N \cup \{p\}$がpのminimal細近傍となるものがある.

証明. 補題3の証明と同様に, $\Delta_1^W = \{p_1, \cdots, p_n\}$および(5)をみたす正数列$c_1, \cdots, c_n$が存在するとしてよい. 補題2より, Mで$\hat{R}_g^{D-M} < g$となる. したがって, (3),(5) 等により$\pi^{-1}(M)$で

$$ \sum_{i=1}^{n} c_i {}^{W}\hat{R}_{k_i}^{W-\pi^{-1}(M)} = {}^{W}\hat{R}_{g\circ\pi}^{W-\pi^{-1}(M)} = {}^{D}\hat{R}_g^{D-M} \circ \pi < g \circ \pi = \sum_{i=1}^{n} c_i k_i $$

となる. それ故, Nで${}^{W}\hat{R}_{k_\nu}^{W-\pi^{-1}(M)} \neq k_\nu$となるような$\nu \in \{1, \cdots, n\}$が存在する. 一方, balayageの基本性質より, Nで${}^{W}\hat{R}_{k_\nu}^{W-\pi^{-1}(M)} = {}^{W}\hat{R}_{k_\nu}^{W-N}$となることがわかる. 結局, Nで${}^{W}\hat{R}_{k_\nu}^{W-N} \neq k_\nu$, 即ち, $N \cup \{p_\nu\}$はp_νのminimal細近傍となる. □

定理2の証明. まず, $\dim \mathcal{P}(W) = n$とする. (1) より, $\Delta_1^W = \{p_1, \cdots, p_n\}$とおける. 各$p_i$に対し$N_i \cup \{p_i\}$が$p_i$のminimal細近傍となるような互いに素な$W$の領域列$N_1, \cdots, N_n$がとれる. 補題3より各$N_i$に対して$\pi(N_i) \in \mathcal{M}$であり, したがって$\cap_{i=1}^n \pi(N_i) \cup \{0\}$は0の細近傍となる. さらに$\pi(\cup_{i=1}^n \partial N_i)$は0でthinだから, 補題2より$\cap_{i=1}^n \pi(N_i) - \pi(\cup_{i=1}^n \partial N_i)$のcomponent Mで$M \in \mathcal{M}$となるものが存在する. このとき, 各iに対して$O_i \subset N_i$となるような$\pi^{-1}(M)$のcomponent O_iがとれる. 明らかに$O_1, \cdots, O_n$は互いに素であるから, $n_W(M) \geq n$, したがって$\max_{M\in\mathcal{M}} n_W(M) \geq \dim \mathcal{P}(W)$となる.

次に, $M \in \mathcal{M}$を任意にとり$m = n_W(M)$および$\pi^{-1}(M)$の連結成分全体を$\{N_1, \cdots, N_m\}$とおく. 補題4より, 各N_iに対して$N_i \cup \{p_i\}$がp_iのminimal細近傍となるような点$p_i \in \Delta_1^W$が存在する. $N_1, \cdots, N_m$は互いに素であるから, $p_1, \cdots, p_m$は互いに相異なり$\#\Delta_1^W \geq m$, したがって (1) より$\dim \mathcal{P}(W) \geq m$となる. Mは任意であったから$\dim \mathcal{P}(W) \geq \max_{M\in\mathcal{M}} n_W(M)$を得る. □

5. ここでは, $\mathcal{E}_m$に属するendで定理1のVよりも一般的な具体例について, 定理2 (または系1および2) を使ってその調和次元を調べる.

$\{I_n\}_{1\leq n<\infty}$および$\{J_n\}_{1\leq n<\nu}$ $(1 \leq \nu \leq \infty)$をD内の互いに交わらない閉線分の列で$z = 0$のみに集積するものとし, さらに

$$ I = \cup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad J = \cup_{n=1}^{\nu} J_n, \quad S = D - I - J $$

とおく. そこで, 次の2条件をみたす$W(\in \mathcal{E}_m)$全体を$\mathcal{F}_m(I, J)$で表す:

(i) Wの任意の分岐点はI_nまたはJ_nの端点の上にあり, 各I_nの端点の上には分岐度$m - 1$の

Wの分岐点がある,
(ii) $W-\pi_W^{-1}(I\cup J)=S_1\cup\cdots\cup S_m$ (disjoint union, $S_1.\cdots,S_m$はSの copy).

以下では, $\mathcal{F}_m(I,J)$に属する endの調和次元を調べる. 手始めに次を示す:

定理 3. $W\in\mathcal{F}_m(I,J)$とする. $I\cup J$が$z=0$でthinならば, $\dim\mathcal{P}(W)=m$である.

これは最初に[**12**,M-Se]において証明されたものであるが, こででは系1を使った極めて短い別証を与える. また, 定理3から定理1の(i)が直ちに導かれることを注意する.

定理3の証明. 仮定より$S=D-I-J$は$\mathcal{M}$に属し, 条件(ii)より$n_W(S)=m$となる. したがって, 系1より$\dim\mathcal{P}(W)=m$である. □

半直線$\{\arg z=\alpha\}$をl_αとおく. また, thinでないことを**thick**と呼ぶ.

定理 4. $W\in\mathcal{F}_m(I,J)$, $I\subset l_\alpha$とする. このとき, Iが$z=0$で thickでありかつJが$z=0$で thinならば, $\dim\mathcal{P}(W)=1$ である.

上で$J=\emptyset$, $\alpha=0$として, 定理1の(ii)が得られることを注意する. 定理4および5の証明には次の事実が使われる(例えば, [**5**,Hl] 参照).

補題5. Dの閉部分集合Eに対して$E'=\{|z|:z\in E\}$とおく. このとき, Eが$z=0$で thinならばE'も$z=0$で thinである.

定理4の証明. $\alpha=0$として一般性を失わない. 系2より, 任意の$M\in\mathcal{M}$に対して$n_W(M)=1$, 即ち$\pi_W^{-1}(M)$が連結, となることを示せばよい. $E=(D-M)\cup J$とおくと, $D-M$もJも$z=0$でthinであるからEも$z=0$でthinである. したがって, 補題5よりE'は$z=0$でthinである. これと仮定から$I-E'$は$z=0$でthickである. 故に, $r\in I-E'$となるrが存在する. $C=\{|z|=r\}$とおくと, これは$C\subset M$, $C\cap J=\emptyset$かつ$C\cap I$が唯1点のみからなることを意味する. $C\subset M$より$\pi_W^{-1}(C)\subset\pi_W^{-1}(M)$となる. さらに, $C\cap J=\emptyset$, $C\cap I$が唯1点のみからなることおよび条件(i)(I_nの端点の上には$m-1$の分岐点がある)を考え合わせれば, $\pi_W^{-1}(C)$が連結であることが証明される(cf. e.g. [**13**,M-Se]). $\pi_W^{-1}(C)\subset\pi_W^{-1}(M)$および$M$と$\pi_W^{-1}(C)$の連結性から$\pi_W^{-1}(M)$の連結性が容易に導かれる. 実際, Mの連結性から, $\pi_W^{-1}(M)$の任意の2点a, bのそれぞれと$\pi_W^{-1}(C)$を結ぶM内の連続曲線が存在する. 故に, $\pi_W^{-1}(C)$の連結性からaとbを結ぶM内の連続曲線の存在がわかる. □

定理 5. $W\in\mathcal{F}_m(I,J)$, $I\subset l_\alpha$, さらに$J\subset D-\{|\arg z-\alpha|<\varepsilon\}$をみたす正数$\varepsilon$が存在するとする. このとき, Iと$l_\alpha-I$が共に$z=0$でthickならば, $\dim\mathcal{P}(W)=1$である.

証明の前に, 上の"$l_\alpha-I$が$z=0$で thick"という仮定を落とせないことを注意しておく. 定理5の証明には次のDeny[**4**,D]の結果が必要である.

補題6. Uを$z=0$の細近傍とする. このとき, $\{|z|=1\}$の polar部分集合Zで次の条件をみたすものがある: $l_\theta\cap Z=\emptyset$をみたす任意のl_θに対して, $l_\theta\cap\{|z|<\rho\}\subset U$となるような正数$\rho=\rho_\theta$が存在する.

定理5の証明. $\alpha = 0$として一般性を失わない. 前の定理の証明と同様に, 任意の$M \in \mathcal{M}$に対して$\pi_W^{-1}(M)$が連結であることを示せばよい. 補題6より, $l_\beta \cap \{|z| < \rho\} \subset M$, $l_\gamma \cap \{|z| < \rho\} \subset M$かつ$-\varepsilon < \beta < 0 < \gamma < \varepsilon$をみたす$\rho(>0)$, β, γが存在する. 補題5より, $\{|z| : z \in D - M\}$は$z = 0$で thinである. これと仮定から, $0 < t < s < \rho$, $s \in I$, $t \in l_0 - I$かつ$\{|z| = s\} \cup \{|z| = t\} \subset M$をみたす$s$, tがとれる.

$$C = \{se^{i\theta} : \beta < \theta < \gamma\} \cup \{re^{i\beta} : t \leq r \leq s\} \cup \{te^{i\theta} : \beta < \theta < \gamma\} \cup \{re^{i\gamma} : t \leq r \leq s\}$$

とおくと, CはM内の閉曲線であるから$\pi_W^{-1}(C) \subset \pi_W^{-1}(M)$となる. また, β, γ, s, tの取り方と条件(i)から, $\pi_W^{-1}(C)$が連結であることを証明できる. $\pi_W^{-1}(C) \subset \pi_W^{-1}(M)$および$M$と$\pi_W^{-1}(C)$の連結性から$\pi_W^{-1}(M)$の連結性が結論されるのは, 定理4の証明と同様である. □

6. 2でみたように, 任意の$W \in \mathcal{E}_m$に対して$1 \leq \dim \mathcal{P}(W) \leq m$である. また, 定理1より$\dim \mathcal{P}(W) = 1$または$m$となる$W \in \mathcal{E}_m$が存在する. 最後に, 定理2の今1つの応用として, $1 < n < m$をみたす任意の自然数nに対して, $\dim \mathcal{P}(W_n) = n$となる end $W_n \in \mathcal{E}_m$の具体例を与える.

便宜上, $\mathcal{E}_1 = \{D\}$とおく. 定理1と$\dim \mathcal{P}(D) = 1$より, $\dim \mathcal{P}(V_1) = n - 1$となる end $V_1 \in \mathcal{E}_{n-1}$および$\dim \mathcal{P}(V_2) = 1$となる end $V_2 \in \mathcal{E}_{m-n+1}$ が存在する. D内の閉線分の列$\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$で$I = \cup_{j=1}^{\infty} I_j$が$z = 0$で thinでありかつ$\pi_{V_1}^{-1}(I)$ (または$\pi_{V_2}^{-1}(I)$)の上にはV_1 (またはV_2)の分岐点が無いものをとる. さらに, V_1 (またはV_2)上の閉線分I_{1j} (またはI_{2j})で$\pi_{V_1}(I_{1j}) = I_j$ (または$\pi_{V_2}(I_{2j}) = I_j$)となるものをとり, V_1とV_2を, $\cup_{j=1}^{\infty} I_{1j}$と$\cup_{j=1}^{\infty} I_{2j}$において交差状に貼り合わせて得られる$D$の被覆面を$W_n$とすると, $W_n \in \mathcal{E}_m$は明らかである. $\dim \mathcal{P}(W_n) = n$を示す. 定理2より$n_{V_1}(M) = n - 1$となる$M \in \mathcal{M}$が存在する. Iは$z = 0$で thinだから, $M - I$の連結成分M'で$M' \in \mathcal{M}$となるものが存在する. $n_{V_1}(M') = n - 1$かつ$n_{V_2}(M') = 1$であることより, $n_{W_n}(M') = n$となることがわかる. 故に, 定理2より$\dim \mathcal{P}(W_n) \geq n$である. また, 定理2より任意の$M \in \mathcal{M}$に対して$n_{V_1}(M) \leq n - 1$かつ$n_{V_2}(M) = 1$であり, これより$n_{W_n}(M) \leq n$がわかる. したがって, 定理2より$\dim \mathcal{P}(W_n) \leq n$となる.

References

[*] **Potential論または理想境界に関するもの**

[**1**,Bl-Ha] J. Bliedtner and W. Hansen, *Potential Theory*, Springer, 1986.

[**2**,Br] M. Brelot, *On Topologies and Boundaries in Potential Theory*, Lecture Notes in Math. **175**(1971), Springer.

[**3**,Cn-Cr] C. Constantinescu and A. Cornea, *Ideale Ränder der Riemannscher Flächen*, Springer, 1963.

[4,D] J. Deny, *Un théorème sur les ensembles effilés*, Ann. Univ. de Grenoble, Sect. sci. Math. Phys., **23**(1948), 139-142.

[5,Hl] L. Helms, *Introduction to Potential Theory*, Wiley-Interscience, 1969.

[6,Na] L. Naïm, *Sur le rôle de la frontiére de R.S. Martin dans la théorie du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, **7**(1957), 183-281.

[**] 調和次元に関するもの

[7,Cn-Cr] C. Constantinescu and A. Cornea, *Über einige Probleme von M. Heins* ,Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **4**(1959), 277-281.

[8,He] M. Heins, *Riemann surfaces of infinite genus*, Ann. of Math., **55**(1952), 296-317.

[9,Kr] Z. Kuramochi, *An example of a null-boundary Riemann surface*, Osaka Math. J., **6**(1954), 83-91.

[10,Ks] Y. Kusunoki, *On Riemann's period relations on open Riemann surfaces*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A. Math., **21**(1956), 1-22.

[11,M] H. Masaoka, *Harmonic dimension of covering surfaces II*, Kodai Math. J., **18**(1995), 487-493.

[12,M-Se] H. Masaoka and S. Segawa, *Harmonic dimension of covering surfaces*, Kodai Math. J., **17**(1994), 351-359.

[13,M-Se2] H. Masaoka and S. Segawa, *Harmonic dimension of covering surfaces and minimal fine neighborhood*, preprint.

[14,Nk-Sa] M. Nakai and L. Sario, *Harmonic and relative harmonic dimensions*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A.I. Math., **10**(1985), 419-432.

[15,Se] S. Segawa, *A duality relation for harmonic dimensions and its applications*, Kodai Math. J., **4**(1981), 508-514.

[16,Se] S. Segawa, *Harmonic dimension and extremal length*, Kodai Math. J., **17**(1994), 256-261.

[17,Sh] H. Shiga, *On harmonic dimensions and bilinear relations on open Riemann surfaces*, J. Math. Kyoto Univ., **21**(1981), 861-879.

[***] **end**上での$\Delta u = Pu$または楕円型微分方程式の正値解に関するもの

[18,Hy] K. Hayashi, *Les solutions positives de l'équation $\Delta u = Pu$ sur une surface de Riemann*, Kōdai Math. Sem. Rep., **13**(1961), 20-24.

[19,Ka] M. Kawamura, *Picard principle for finite densities on some end*, Nagoya Math. J., **67**(1977), 35-40.

[20,Ka-Se] M. Kawamura and S. Segawa, *P-Harmonic dimensions on ends*, Nagoya Math. J., **132**(1993), 131-139.

[21,Nk] M. Nakai, *Picard principle and Riemann theorem*, Tôhoku Math. J., **28**(1976), 277-292.